

---

---

# 第一篇 力学

---

---

力学是物理学的一个分支,物理学的建立是从力学开始的。力学的基本原理是整个物理学的重要基础,渗透于其他分支的方方面面。近代物理中的相对论力学和量子力学的形成都受到经典力学的影响,它们的许多概念和思想都是经典力学概念和思想的发展和改造。不仅如此,力学的基础研究不断深化和丰富人类对基本自然规律的认识,不断为其他学科的发展提供认识工具。目前,力学的内容在深化,力学在与其他学科的前沿交叉处迅速发展,形成了多种新的力学分支学科。

力学不仅具有很强的基础性,同时又具有广泛的应用性。力学研究遍及各种工程技术领域,诸如机械工程、土建与水利工程、爆炸与抗爆工程,抗震工程以及航空与航天技术、航海技术等。

经典力学是研究物体机械运动规律的科学。物体位置随时间的变化称为机械运动。经典力学研究的是在弱引力场中宏观物体的低速运动。通常把力学分为运动学和动力学。运动学只研究物体运动的规律,不涉及运动状态变化的原因。动力学则研究物体间的相互作用及其对物体运动的影响。

# 第 1 章 质点运动学

## 【章概述】

力学是物理学的基础,物理学的研究必须从力学开始。为了研究,首先描述。描述质点运动状态变化的物理量有:位置、位移、速度和加速度。本章主要研究这 4 个物理量之间的相互关系及如何用它们来描述物体的机械运动。教学思路是先在一维对运动进行描述,然后再在多维对运动进行描述,这样做有利于分散难点,读者可以在一维运动的描述过程中对物理概念及数学表述掌握透彻,从而相对容易地推广到多维运动的情况。

本章着重阐明两个问题。第一,如何描述质点的运动状态。在运动学中,物体的运动状态用位置和速度来确定,而速度的变化则用加速度描述。通过速度、加速度等概念的建立,加深对运动的瞬时性和矢量性等基本性质的认识。第二,运动学的核心是运动方程。通过对运动方程的学习,既要掌握如何从运动方程出发,求出质点在任意时刻的位置、速度和加速度的方法,又要能够在已知加速度(或速度)与时间的关系以及初始条件的情况下,求出任意时刻质点的速度和位置。

## 【学习重点与难点】

### 1. 重点

描述质点运动的物理量(位置、位移、速度、加速度)的定义及物理意义;根据质点的运动方程求质点的位置、速度和加速度。

### 2. 难点

在已知质点的加速度与时间的关系以及初始条件的情况下,求速度和位置。

### 3. 难点指南

由加速度与时间的关系求速度和位置的问题,需要在理解位置、速度和加速度等基本物理概念的基础上,应用微积分的数学手段来进行计算,从而在物理学的应用中加深对微积分的理解,在微积分的应用中解决物理问题。

## 1.1 一维运动学

### 【学习目标】

掌握一维运动中的运动方程、位移、速度、速率和加速度的概念,能够熟练利用运动方程

求出位置、位移、平均速度、速度、平均加速度和加速度,并能够利用物理量的正负号来判断运动的方向。

### 【知识引入】

**引例 1:**在 2009 年的柏林世界田径锦标赛上,牙买加飞人博尔特以 9 秒 58 获得男子百米冠军,并大幅度改写了他本人在 2008 年北京奥运会夺冠时创造的 9 秒 69 的世界纪录!如图 1.1.1 所示,那么博尔特的平均速度各是多少?

**引例 2:**目前世界上最快的跑车之一:布加迪威航 Super Sport,如图 1.1.2 所示,最大时速 434.2km/h,百公里加速仅需 2.5 秒,0~200 公里加速仅需 7.3 秒,那么其平均加速度各是多少?



图 1.1.1 博尔特与世界记录



图 1.1.2 布加迪威航 Super Sport

### 【知识正文】

#### 1.1.1 运动方程和位移

质点在一维运动的情况下,在质点运动所在的直线上建立坐标系,如图 1.1.3 所示,假设在时刻  $t_1$ ,质点所在位置的坐标为  $x_1$ ,就用质点所在位置处的坐标来表示质点的位置。在时刻  $t_2$ ,质点所在的位置为  $x_2$ ,即一维运动质点的位置  $x$  随时间  $t$  的变化而变化,即位置是时间的函数,记为

$$x = x(t) \quad (1.1.1)$$

称为运动函数,也叫运动方程,它的物理意义是质点的位置随时间的变化。根据运动方程,可以求出质点在任意时刻的位置。

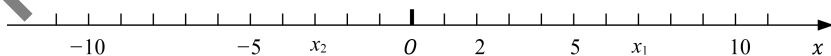


图 1.1.3 位置坐标

比如  $x=3t-4$  和  $x=5\sin t$  都是质点的运动方程。对于运动方程为  $x=9-2t$  的质点,在时刻  $t_1=1$ ,位置  $x(1)=9-2\times 1=7$ ;在时刻  $t_2=6$ ,位置  $x(6)=9-2\times 6=-3$ 。

质点在时刻  $t_1$  的位置为  $x(t_1)$ ,在时刻  $t_2$  的位置为  $x(t_2)$ ,则质点在  $t_1$  到  $t_2$  时间内位置的变化是  $x(t_2)-x(t_1)$ ,称为位移,记为  $\Delta x$ ,即

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) \quad (1.1.2)$$

位移的物理意义是位置的变化(即增量),即位移 = 末位置 - 初位置。

路程是质点运动轨迹的长度,记为  $s$ ,它一定是正数,而位移  $\Delta x$  可正可负。

国际单位制,简记为 SI,是现在世界上最普遍采用的单位系统,常用的物理量国际单位见表 1.1.1。在本教材中,若标有 SI,即表示物理量的单位采用国际单位。

表 1.1.1 常用物理量的国际单位

物理量名称	长度	时间	质量	电流	温度	物质的量
物理量符号	$L$	$t$	$m$	$I$	$T$	$\nu$
单位名称	米	秒	千克	安培	开尔文	摩尔
单位符号	m	s	kg	A	K	mol

例 1.1.1 某质点的运动方程为  $x=9-2t$ (SI),求该质点在  $t_1=1\text{s}$  到  $t_2=6\text{s}$  这段时间内的位移。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{位移 } \Delta x &= x(t_2) - x(t_1) = x(6) - x(1) \\ &= (9 - 2 \times 6) - (9 - 2 \times 1) = -3 - 7 = -10(\text{m}) \end{aligned}$$

因为质点在  $x$  轴上运动,运动的方向只有  $x$  轴的正方向和负方向两种情况,可以用位移的正负号来表示,即当位移  $\Delta x > 0$  时,运动的方向是沿  $x$  轴的正方向;当位移  $\Delta x < 0$  时,运动的方向是沿  $x$  轴的负方向。

本例题位移  $\Delta x = -10 < 0$ ,所以质点在这段时间内的总体运动方向是  $x$  轴负方向。

例 1.1.2 如图 1.1.4 所示,在一段时间内,某质点的位置依次经过  $-5, 5, 2$ (SI),求质点在这段时间内的位移和路程。

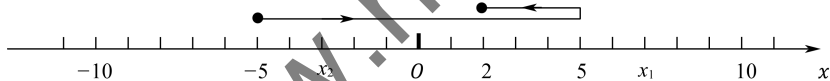


图 1.1.4 位移和路程

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{位移 } \Delta x &= x(t_2) - x(t_1) = 2 - (-5) = 7(\text{m}) \\ \text{位移 } \Delta x &= 7 > 0, \text{质点在这段时间内的总体运动方向是 } x \text{ 轴正方向。} \\ \text{路程 } s &= [5 - (-5)] + (5 - 2) = 10 + 3 = 13(\text{m}) \end{aligned}$$

## 1.1.2 速度

质点在一段时间内运动的快慢和方向用平均速度来表示,记为  $\bar{v}$ ,即

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\text{位移 } \Delta x}{\text{时间间隔 } \Delta t}, \text{即 } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.1.3)$$

平均速度的方向用其正负号来表示,即当  $\bar{v} > 0$  时,平均速度的方向是沿  $x$  轴的正方向;当  $\bar{v} < 0$  时,平均速度的方向是沿  $x$  轴的负方向。

在国际单位制中(平均)速度的单位:米/秒,符号:m/s。

例 1.1.3 某质点的运动函数为  $x=9-2t$ (SI),求该质点在  $t_1=1\text{s}$  到  $t_2=6\text{s}$  这段时间内的平均速度。

$$\text{解} \quad \text{位移 } \Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x(6) - x(1) = -3 - 7 = -10(\text{m})$$

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10}{6-1} = -2(\text{m/s})$$

$\bar{v} = -2 < 0$ , 即平均速度的方向是沿  $x$  轴负方向。

**例 1.1.4** 某质点的运动函数为  $x = t^2 - 5$  (SI), 求该质点在  $t_1 = 2\text{s}$  到  $t_2 = 4\text{s}$  这段时间内的平均速度。

**解** 位移  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x(4) - x(2) = 11 - (-1) = 12(\text{m})$

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12}{4-2} = 6(\text{m/s})$$

$\bar{v} = 6 > 0$ , 即平均速度的方向是沿  $x$  轴正方向。

质点在一段时间内的运动快慢和方向用平均速度来表示, 在某一时刻的运动快慢和方向要用(瞬时)速度来表示, 那么(瞬时)速度该如何定义呢?

假设质点的运动函数为  $x = x(t)$ , 则时刻  $t$  的位置是  $x(t)$ , 时刻  $t + \Delta t$  的位置是  $x(t + \Delta t)$ , 即质点在  $\Delta t$  时间内的位移为  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ , 时间间隔为  $\Delta t$ , 在  $\Delta t$  时间内的平均速度为  $\bar{v} = \Delta x / \Delta t$ , 如果用  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内的平均速度  $\bar{v} = \Delta x / \Delta t$  来作为  $t$  时刻的速度, 显然误差比较大, 不能精确描述  $t$  时刻的运动快慢和方向, 我们可以利用数学中的极限思想和变化率知识来进行分析, 如果用较短时间间隔  $\Delta t$  内的平均速度来作为  $t$  时刻的速度, 相对来说误差会变小, 即可以相对准确的描述  $t$  时刻的运动快慢和方向, 如果用更短时间间隔  $\Delta t$  内的平均速度来作为  $t$  时刻的速度, 则相对来说误差会变得更小, 即可以相对更准确的描述  $t$  时刻的运动快慢和方向, 按照这个思路, 则在无限短时间间隔  $\Delta t$  内的平均速度来作为  $t$  时刻的速度, 则误差趋于零, 就可以精确的描述质点在  $t$  时刻的运动快慢和方向, 即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

利用数学中的变化率知识, 可得

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.1.4)$$

即质点的速度定义为该质点的位置对时间的变化率。

与平均速度一样, 速度的正负号表示速度的方向是沿  $x$  轴的正方向还是负方向。

**例 1.1.5** 某质点的运动函数为  $x = 6t - t^2$  (SI), 求该质点: (1) 在时刻  $t_1 = 2\text{s}$  和  $t_2 = 5\text{s}$  的速度; (2) 在时刻  $t_1 = 2\text{s}$  到  $t_2 = 5\text{s}$  时间间隔内的平均速度; (3) 在时刻  $t_1 = 2\text{s}$  到  $t_2 = 5\text{s}$  时间内的路程。

**解** (1) 根据速度的定义式可得

$$v = \frac{dx}{dt} = 6 - 2t$$

$$v(t_1) = v(2) = 6 - 2 \times 2 = 2(\text{m/s})$$

$v(t_1) = 2 > 0$ , 质点速度的方向是沿  $x$  轴的正方向。

$$v(t_2) = v(5) = 6 - 2 \times 5 = -4(\text{m/s})$$

$v(t_2) = -4 < 0$ , 质点速度的方向是沿  $x$  轴的负方向。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 平均速度 } \bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2} \\ &= \frac{(30 - 25) - (12 - 4)}{3} = \frac{-3}{3} = -1(\text{m/s}) \end{aligned}$$

(3) 由本题(1)可知质点的速度方向发生了改变, 所以路程不是位移的绝对值。

由  $v=6-2t$  可得质点在时刻  $t=3\text{s}$  时速度为 0, 容易得到  $x(2)=8, x(3)=9, x(5)=5$ , 则质点在时刻  $t_1=2\text{s}$  到  $t=3\text{s}$  时间间隔内的路程为  $s_1=x(3)-x(2)=9-8=1$ , 在时刻  $t=3\text{s}$  到  $t_2=5\text{s}$  时间间隔内的路程为  $s_2=x(3)-x(5)=9-5=4$ , 所以在时刻  $t_1=2\text{s}$  到  $t_2=5\text{s}$  时间内的总路程为  $s=s_1+s_2=1+4=5(\text{m})$ 。

### 1.1.3 加速度

若质点的速度函数为  $v(t)$ , 即在时刻  $t$  的速度是  $v(t)$ , 在时刻  $t+\Delta t$  的速度是  $v(t+\Delta t)$ , 即质点在  $\Delta t$  时间内速度的变化为  $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$ , 在  $\Delta t$  时间内速度对时间的平均变化率称为平均加速度, 记为  $\bar{a}$ , 即

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

平均加速度用来表示质点在一段时间内速度变化的平均快慢和方向, 而质点在某一时刻速度变化的快慢和方向用(瞬时)加速度来表示, 记为  $a$ , 与速度的分析和定义过程类似, 有

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.1.5)$$

加速度的单位: 米 / 秒<sup>2</sup>, 符号:  $\text{m/s}^2$ 。

**例 1.1.6** 某质点的速度函数为  $v(t)=t^2-4t+7(\text{SI})$ , 求该质点: (1) 在时刻  $t_1=1\text{s}$  到  $t_2=3\text{s}$  时间间隔内的平均加速度; (2) 在时刻  $t_1=1\text{s}$  和  $t_2=3\text{s}$  时的加速度。

**解** (1) 平均加速度  $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{x(3)-x(1)}{3-1}$

$$= \frac{(9-12+7)-(1-4+7)}{3} = \frac{4-4}{3} = 0(\text{m/s}^2)$$

(2) 加速度  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 2t-4$

$$a(t_1) = a(1) = 2-4 = -2(\text{m/s}^2); a(t_2) = a(3) = 6-4 = 2(\text{m/s}^2)$$

$a(1) = -2 < 0$ , 沿  $x$  轴的负方向;  $a(3) = 2 > 0$ , 沿  $x$  轴的正方向。

## 1.2 多维运动学

### 【学习目标】

- 知道参考系、坐标系和位置坐标的概念, 会用坐标表示质点的位置;
- 掌握多维运动的标量表示和矢量表示, 能够用标量和矢量形式计算多维运动的位置、位移、速度和加速度, 包括由运动方程求速度、加速度, 以及由速度或加速度求运动方程;
- 理解轨道方程的概念, 能够由运动方程求出轨道方程。

### 【知识引入】

**引例 1:** 上早操时有位同学在学院的操场上沿着 400 米的跑道跑了两圈, 他的位移和路



程各是多少?

**引例 2:**一只在星际空间飞行的火箭,当它的燃料以恒定速率燃烧时,其运动方程可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = \left[ ut + u \left( \frac{1}{b} - t \right) \ln(1 - bt) \right] \boldsymbol{k}$$

其中  $u$  是喷出气体相对于火箭体的速度,是一个常量,  $b$  是与燃烧速率成正比的一个常量。则此火箭的速度和加速度各是多少?

## 【知识正文】

### 1.2.1 参考系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的,这就是说,任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的,这个其他物体或物体系就叫做确定物体位置时用的参考物。例如,确定交通车辆的位置时,我们用固定在地面上的一些物体,如房子或路牌作参考物。

相对于不同的参考物,同一物体的同一运动会表现为不同的形式。例如,一个自由下落的石块的运动,站在地面上观察,即以地面为参考物,它是直线运动;如果在近旁驶过的车厢内观察,即以行进的车厢为参考物,则石块将做曲线运动。物体运动的形式随参考物的不同而不同,这个事实叫运动的相对性。由于运动的相对性,当我们描述一个物体的运动时,就必须指明是相对于什么参考物来说的。

确定了参考物之后,为了定量地说明一个质点相对于此参考物的空间位置,就在此参考物上建立固定的坐标系。最常用的坐标系是空间直角坐标系,有时为了研究问题的方便还可以选用其他坐标系,如极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系。如图 1.2.1 所示,在空间直角坐标系中,一个质点的位置,就用该位置的坐标  $(x, y, z)$  来表示。固定在参考物上的坐标系称为参考系。常用的参考系有地面参考系,地心参考系,太阳参考系和实验室参考系。

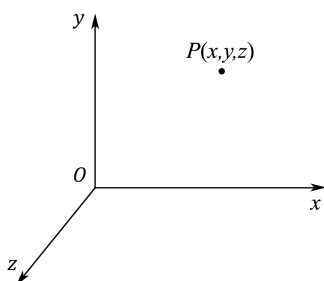


图 1.2.1 质点的位置表示

### 1.2.2 多维运动的标量表示

质点的位置用其坐标来表示,质点的运动就是它的位置随时间的变化,所以质点的运动可以用它的坐标随时间的变化关系来描述,与一维运动中描述质点的位置随时间变化的关系式  $x = x(t)$  类似,在多维运动中描述质点的位置随时间变化的关系式为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.2.1)$$

上式是质点在多维运动中的**运动方程**(运动函数)的标量形式。

如果质点在二维平面上运动,则该运动方程简化为  $x = x(t), y = y(t)$ ;如果质点在一维运动,则简化为  $x = x(t)$ ,即一维运动学的运动方程。

在质点的运动方程中消去时间参量  $t$ ,得到的坐标之间的关系式称为质点的**轨道方程**。

类似于一维运动学中速度和加速度的定义,多维运动学中速度和加速度分别定义为

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.2.2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (1.2.3)$$

**例 1.2.1** 一质点的运动方程为  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t^3$ , 求该质点的速度和加速度。

**解** 速度  $v_x = \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 6t^2$ 。

加速度  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\cos t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\sin t, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 12t$ 。

**例 1.2.2** 一质点的运动函数为  $x = 2t, y = 3 - t^2$ , 求该质点的轨道方程。

**解** 由式  $x = 2t$  得  $t = \frac{x}{2}$ , 代入式  $y = 3 - t^2$  得轨道方程  $y = 3 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3 - \frac{x^2}{4}$ 。

可知此质点的运动轨迹是一条开口向下的抛物线。

### 1.2.3 多维运动的矢量表示

#### 1. 位置矢量和运动方程

质点的位置可以用坐标来表示,还可以用位置矢量来表示。如图 1.2.2 所示,对于  $P$  点的位置,一方面,可以用坐标  $(x, y, z)$  来表示;另一方面,如果从原点  $O$  向该点引一有向线段  $OP$ , 并记做矢量  $\mathbf{r}$ , 显然,有向线段  $OP$  与点  $P$  的位置有一一对应关系,因此可以用从原点  $O$  到点  $P$  的矢量  $\mathbf{r}$  来表示  $P$  点的位置,称  $\mathbf{r}$  为  $P$  点的位置矢量,简称位矢,也叫径矢。以  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  分别表示沿  $x, y, z$  轴正方向的单位矢量,则  $P$  点的位置矢量为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.2.4)$$

例如,若质点的位置坐标为  $P(2, -4, 7)$ , 则该质点的位置矢量为  $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ 。为了以后的学习方便,我们就是用位置矢量  $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  表示位置  $(2, -4, 7)$ 。

位矢  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  的大小用其模  $|\mathbf{r}|$  来表示,记为  $r$ , 即

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2.4)$$

**例 1.2.3** 一质点的位置坐标为  $P(3, -4, 12)$  (SI), 求质点的位置矢量和位矢的模。

**解** 质点的位置矢量为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k} (\text{m}),$$

位矢的模为  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 (\text{m})$ 。

对于一个运动的质点,其运动函数的标量形式  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ , 利用式 (1.2.4) 可以得到运动方程(或运动函数)的矢量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.2.5)$$

例如,一质点的运动方程的标量形式为  $x = t^2, y = -t^3, z = 2t$ , 则该质点运动方程的矢量形式为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ 。

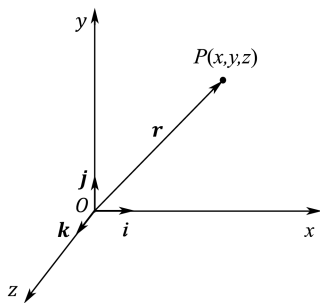


图 1.2.2 位置矢量



运动方程的矢量形式其实是质点在时刻  $t$  的位置矢量,用来表示质点的位置。

**例 1.2.4** 一质点的运动方程为  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ , 求质点在时刻  $t_1 = 1\text{s}$  到  $t_2 = 3\text{s}$  时的位置。

**解** 位置矢量  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(1) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} - 27\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 。

**例 1.2.5** 一质点的运动方程为  $x = \cos 2t, y = \sin 2t$ , 求该质点的位矢和轨道方程。

**解** 该运动质点的位置矢量为  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$ ;  
利用三角函数恒等式有

$$x^2 + y^2 = (\cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 = 1, \text{即轨道方程为 } x^2 + y^2 = 1.$$

## 2. 位移

如图 1.2.3 所示,假设质点的运动函数为  $\mathbf{r}(t)$ , 则  $t$  时刻的位置是  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t + \Delta t$  时刻的位置是  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ , 把质点在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内位置的变化称为在该段时间内的位移, 记为  $\Delta\mathbf{r}$ , 即

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (1.2.6)$$

比如在例 1.2.5 中,质点在时刻  $t_1 = 1\text{s}$  到  $t_2 = 3\text{s}$  这段时间间隔内的位移是

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(3) - \mathbf{r}(1) = (9\mathbf{i} - 27\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 8\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

位移是描述质点空间位置变化的物理量,它同时表示了质点位置变化的距离和方向。位移不同于位置矢量,在质点运动过程中,位置矢量表示某时刻质点的位置,它描述该时刻质点相对于坐标原点的位置状态,是描述状态的物理量,位移则表示某段时间内质点位置的变化,是与运动过程相对应的物理量。

位移也不同于路程,质点从  $P_1$  运动到  $P_2$  所经历的路程  $\Delta s$  是图 1.2.3 中从  $P_1$  到  $P_2$  的一段曲线长,路程是标量,恒为非负。一般情况下,路程  $\Delta s$  与位移的大小  $|\Delta\mathbf{r}|$  (图 1.2.3 中  $P_1$  和  $P_2$  之间的弦长) 不相等。只有当质点作单向的直线运动时,路程和位移的大小才是相等的。此外,只有在时间间隔  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限情况下,点  $P_2$  才无限靠近  $P_1$ , 弦  $P_1P_2$  的长度与曲线弧  $\widehat{P_1P_2}$  的长度才无限接近,即  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\mathbf{r}|$ 。又因为元路程  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s = ds$ , 元位移的大小  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\mathbf{r}| = |d\mathbf{r}|$ , 所以  $ds = |d\mathbf{r}|$ 。

**例 1.2.6** 在曲线运动中,  $|\Delta\mathbf{r}|$  与  $\Delta r$  是否相同? 需要作图说明。

**解** 如图 1.2.4 所示,  $|\Delta\mathbf{r}|$  是位移的大小, 其值恒为非负; 而位矢的大小  $r$  的增量  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ , 是末位矢的大小减去初位矢的大小, 即位矢大小的增量, 其值正数、零和负数都可以取。在一般的曲线运动中二者明显不同, 只有在单向的直线运动中二者才相同。

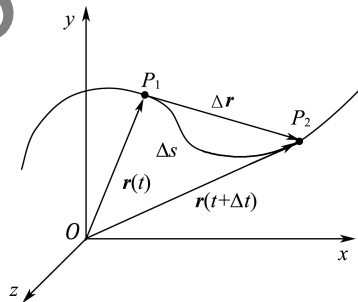


图 1.2.3 位移

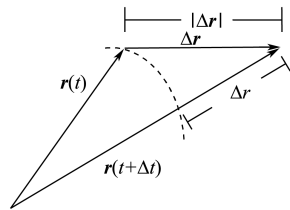


图 1.2.4  $|\Delta\mathbf{r}|$  和  $\Delta r$  的区别

### 3. 速度

运动质点的位置随着时间变化,产生了位移,而位移一般也是随着时间变化的,那么位移  $\Delta r$  和产生该位移所用的时间  $\Delta t$  之比  $\Delta r/\Delta t$  是一个怎样的物理量呢?从物理意义上来看,它描述的是在时间  $\Delta t$  内质点位置变化的平均快慢和方向。位移  $\Delta r$  和发生该位移所用的时间  $\Delta t$  之比  $\Delta r/\Delta t$  叫做质点在这段时间内的平均速度,记为  $\bar{v}$ ,即

$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\text{位移 } \Delta r}{\text{时间间隔 } \Delta t}, \text{ 即 } \bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1.2.7)$$

平均速度是矢量,它的方向就是相应位移的方向,如图 1.2.5 所示。

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,平均速度的极限称为质点在  $t$  时刻的瞬时速度,简称速度,用以描述质点在某一时刻运动的快慢和方向,记为  $v$ ,即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1.2.8)$$

速度的方向就是  $\Delta t \rightarrow 0$  时  $\Delta r$  的方向,如图 1.2.5 所示,当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $P_1$  点趋近  $P$  点,  $\Delta r$  的方向最后将与质点运动轨道在  $P$  点的切线方向一致。因此质点的速度方向即为运动轨道的切线方向指向运动的前方。

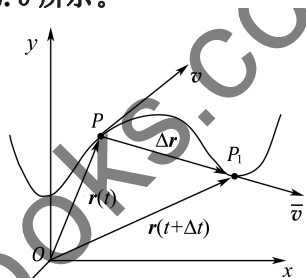


图 1.2.5 平均速度与速度

在直角坐标系里,速度  $v$  可表示为:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{d(xi + yj + zk)}{dt} \\ &= \frac{d(xi)}{dt} + \frac{d(yj)}{dt} + \frac{d(zk)}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \end{aligned}$$

若记

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.2.9)$$

分别表示速度  $v$  沿  $x, y, z$  三个坐标轴方向的分量,则

$$v = v_x i + v_y j + v_z k \quad (1.2.10)$$

从式(1.2.10)可以看出,质点的速度  $v$  是各分速度的矢量和,这一关系式也称为速度叠加原理。

速度的大小称为速率,以  $v$  表示,即

$$v = |v| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{|dr|}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (1.2.11)$$

即速率等于路程对时间的变化率。由式(1.2.10)有

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.2.12)$$

例如,若  $r(t) = \cos t i + \sin t j + e^{2t} k$ , 则质点在时刻  $t$  的速度

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d(\cos t i + \sin t j + e^{2t} k)}{dt} = -\sin t i + \cos t j + 2e^{2t} k$$

质点在时刻  $t$  的速率

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (2e^{2t})^2} = \sqrt{1 + 4e^{4t}}$$

例 1.2.7 在曲线运动中,  $|\Delta v|$  与  $\Delta v$  是否相同? 需要作图说明。

解 如图 1.2.6 所示,  $|\Delta v| = |\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)|$ , 是速度增量的大小, 其值恒为非负; 而  $\Delta v = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ , 是末速率减去初速率, 即速率的增量, 其值正数、零和负数都可以取。在一般的曲线运动中二者明显不同, 只有在单向的直线运动而且速率不减小的情况下二者才相同。

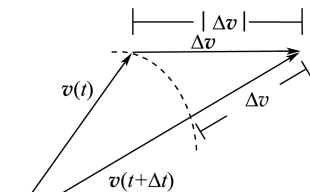


图 1.2.6  $|\Delta v|$  和  $\Delta v$  的区别

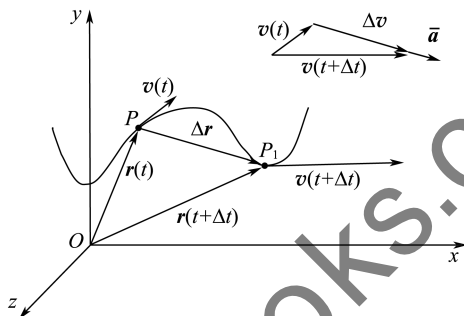


图 1.2.7 平均加速度

#### 4. 加速度

若以  $\mathbf{v}(t)$  和  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  分别表示质点在  $t$  时刻和  $t + \Delta t$  时刻的速度, 如图 1.2.7 所示, 则在  $\Delta t$  时间内质点的平均加速度  $\bar{\mathbf{a}}$  定义为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 此平均加速度的极限, 即速度对时间的变化率, 称为质点在  $t$  时刻的瞬时加速度, 简称加速度, 用以表示质点在  $t$  时刻的速度变化的快慢和方向, 以  $\mathbf{a}$  表示, 即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.2.13)$$

不论是速度的大小发生变化, 还是速度的方向发生变化, 都会产生加速度。

将式(1.2.8)代入式(1.2.13)可得

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.2.14)$$

再将式(1.2.10)和式(1.2.5)代入式(1.2.14)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})}{dt} = \frac{d^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dt^2} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \end{aligned}$$

若记

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.2.15)$$

则

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1.2.16)$$

加速度  $\mathbf{a}$  的大小为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2.17)$$

例如,  $\mathbf{v}(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2e^{2t} \mathbf{k}$ , 则质点在时刻  $t$  的加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2e^{2t} \mathbf{k})}{dt} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + 4e^{2t} \mathbf{k}$$

质点在时刻  $t$  的加速度大小

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (4e^{2t})^2} = \sqrt{1 + 16e^{4t}}$$

在定义速度和加速度的时候, 都用到了微积分学中的导数, 类似的做法, 将会在大学物理的各个部分经常出现, 可见微积分是研究物理学不可或缺的重要工具。

**例 1.2.8** 已知一质点的运动方程为  $x = 2t, y = 18 - 2t^2$  (SI)。求: (1) 质点的轨道方程; (2) 质点的位矢; (3) 质点的速度; (4) 前 2s 内的平均速度; (5) 质点的加速度。

**解** (1) 将质点的运动方程中的时间  $t$  消去, 即由  $x = 2t$  得  $t = x/2$ , 代入  $y = 18 - 2t^2$ , 得到质点的轨道方程为

$$y = 18 - \frac{x^2}{2}$$

(2) 质点的位矢为  $\mathbf{r} = 2t \mathbf{i} + (18 - 2t^2) \mathbf{j}$  (m)

(3) 质点的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

(4) 质点在前 2s 内的平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ [2 \times 2 \mathbf{i} + (18 - 2 \times 2^2) \mathbf{j}] - [0 + (18 - 0) \mathbf{j}] \} \\ &= 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

(5) 质点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j})}{dt} = -4\mathbf{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

**例 1.2.9** 某质点的加速度为  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5t\mathbf{j}$ , 已知  $t = 0$  时它静止于点  $(4, -3)$ , 求该质点任意时刻的速度和位置矢量 (SI)。

**解** (1) 先求质点任意时刻的速度, 根据加速度的定义  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , 可得  $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$ 。两边同时积分得

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} dt$$

把  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5t\mathbf{j}$  代入上式得

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t (2\mathbf{i} - 5t\mathbf{j}) dt$$

计算此积分得

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = 2t\mathbf{i} - \frac{5}{2}t^2\mathbf{j}$$

利用初始条件:当  $t=0$  时质点静止,即  $\mathbf{v}=0$ ,所以任意时刻质点的速度为

$$\mathbf{v}=2t\mathbf{i}-\frac{5}{2}t^2\mathbf{j}(\text{m/s})$$

(2) 下面再求位置矢量,根据速度的定义  $\mathbf{v}=\text{d}\mathbf{r}/\text{d}t$ ,可得  $\text{d}\mathbf{r}=\mathbf{v}\text{d}t$ 。两边同时积分得

$$\int_{r_0}^r \text{d}\mathbf{r}=\int_0^t \mathbf{v}\text{d}t$$

把  $\mathbf{v}=2t\mathbf{i}-\frac{5}{2}t^2\mathbf{j}$  代入上式得

$$\int_{r_0}^r \text{d}\mathbf{r}=\int_0^t \left(2t\mathbf{i}-\frac{5}{2}t^2\mathbf{j}\right)\text{d}t$$

计算此积分得

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t^2\mathbf{i}-\frac{5}{6}t^3\mathbf{j}$$

再利用初始条件:当  $t=0$  时质点位于点  $(4, -3)$ ,即  $\mathbf{r}_0=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ ,所以任意时刻质点的位置矢量,即运动函数为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t^2\mathbf{i}-\frac{5}{6}t^3\mathbf{j}=(t^2+4)\mathbf{i}-\left(\frac{5}{6}t^3+3\right)\mathbf{j}(\text{m})$$

**例 1.2.10** 一只在星际空间飞行的火箭,当它的燃料以恒定速率燃烧时,其运动方程可以表示为

$$\mathbf{r}(t)=\left[ut+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\ln(1-bt)\right]\mathbf{k}$$

其中  $u$  是喷出气体相对于火箭体的速度,是一个常量, $b$  是与燃烧速率成正比的一个常量。则此火箭的速度和加速度各是多少?(本节引例 2)

**解** 因为质点的运动函数为

$$\mathbf{r}(t)=\left[ut+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\ln(1-bt)\right]\mathbf{k}$$

则其速度为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=\frac{\text{d}\mathbf{r}(t)}{\text{d}t}=\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left\{\left[ut+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\ln(1-bt)\right]\mathbf{k}\right\} \\ &=\left[u+u(0-1)\ln(1-bt)+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\frac{-b}{1-bt}\right]\mathbf{k} \\ &=[u-u\ln(1-bt)-u]\mathbf{k}=-u\ln(1-bt)\mathbf{k}\end{aligned}$$

加速度为

$$\mathbf{a}=\frac{\text{d}\mathbf{v}}{\text{d}t}=\frac{\text{d}}{\text{d}t}[-u\ln(1-bt)\mathbf{k}]=-u\frac{-b\mathbf{k}}{1-bt}=\frac{ub\mathbf{k}}{1-bt}$$

#### 1.2.4 匀加速运动

加速度的大小和方向都不随时间改变,即加速度  $\mathbf{a}$  为常矢量的运动,叫做匀加速运动。由加速度的定义  $\mathbf{a}=\text{d}\mathbf{v}/\text{d}t$ ,可得  $\text{d}\mathbf{v}=\mathbf{a}\text{d}t$ 。对此式两边积分,设  $t=0$  时的速度为  $\mathbf{v}_0$ ,任意

时刻  $t$  的速度为  $\mathbf{v}$ , 则有

$$\int_{v_0}^v d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} dt$$

计算可得  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}t$ , 即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (1.2.18)$$

这就是匀加速运动的速度公式。

根据速度的定义  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , 可得  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ 。两边同时积分

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}dt = \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t) dt$$

式中  $r_0$  为质点在  $t=0$  时刻的位矢,  $r$  为质点在任意时刻  $t$  的位矢, 计算积分可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

这就是匀加速运动的位矢公式。

在实际问题中, 常常利用式 (1.2.18) 和 (1.2.19) 的分量式, 它们是速度公式

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \\ v_z &= v_{0z} + a_z t \end{aligned} \right\} \quad (1.2.20)$$

和位置公式

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.21)$$

这两组公式具体地说明了质点的匀加速运动沿 3 个坐标轴方向的分运动, 质点的实际运动就是这 3 个分运动的合成。

以上各式中的加速度和速度沿坐标轴的分量均可正可负, 这要由各分矢量相对于坐标轴的正方向而定, 相同为正, 相反为负。

质点在时刻  $t=0$  时的位矢  $r_0$  和速度  $v_0$  叫做运动质点的初始条件。由式 (1.2.18) 和 (1.2.19) 可知, 在已知加速度的情况下, 给定了初始条件, 就可以求出质点在任意时刻的位置和速度。这个结论在匀加速运动的各公式中看的很明显, 实际上它对质点的任意运动都是成立的。

如果质点沿一条直线做匀加速运动, 就可以选它所沿的直线为  $x$  轴, 而运动就可以只用式 (1.2.20) 和 (1.2.21) 的第一式加以描述。如果再取质点的初始位置为坐标原点, 即取  $x_0=0$ , 这两个公式就变成大家熟知的匀变速直线运动的公式  $v = v_0 + at$  和  $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$  了, 整理可得  $v^2 = v_0^2 + 2ax$ 。

最常见而且很重要的实际匀加速运动是物体只在重力作用下的运动, 这种运动的加速

度的方向总是竖直向下,叫做重力加速度,通常用  $g$  表示,在地面附近的重力加速度的大小约为

$$g=9.80\text{m/s}^2$$

初速度为零的这种运动叫做自由落体运动。以起点为原点,取  $y$  轴正方向竖直向下,则自由落体运动的公式为  $v=gt$  和  $y=\frac{1}{2}gt^2$ ,消去  $t$  后可得  $v^2=2gy$ 。

**例 1.2.11** 在高出海面 30m 的悬崖边上以 15m/s 的初速度竖直向上抛出一个石子,设石子回落时不再碰到悬崖并忽略空气的阻力。求(1)石子能达到的最大高度;(2)石子从被抛出到回落触及海面所用的时间;(3)石子触及海面时的速度。

**解** 取通过抛出点的竖直线为  $x$  轴,向上为正,抛出点为原点。则石子抛出后做匀加速运动,由于重力加速度与  $x$  轴方向相反,所以  $a=-g=-9.80\text{m/s}^2$ ,  $v_0=15\text{m/s}$ 。

(1) 以  $x_1$  表示石子达到的最高位置,此时石子的速度应为  $v_1=0$ ,利用匀加速运动公式  $v^2=v_0^2+2ax$  可得  $v_1^2=v_0^2+2(-g)x_1$ ,所以石子能达到的最大高度

$$x_1=\frac{v_0^2-v_1^2}{2g}=\frac{15^2-0^2}{2\times 9.80}=11.5(\text{m})$$

(2) 石子触及海面时的位置  $x_2=-30$ ,利用匀加速运动公式  $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ ,可得  $x_2=v_0t+\frac{1}{2}(-g)t^2$ ,即  $-30=15t-4.9t^2$ ,解此一元二次方程,得石子从被抛出到回落触及海面所用的时间  $t=4.44\text{s}$ (此方程的另一个解为  $-1.38\text{s}$  对本题无意义,舍去)。

(3) 石子触及海面时的速度

$$v=v_0+at=v_0-gt=15-9.80\times 4.44=-28.5(\text{m/s})$$

从地面上某点向空中抛出一个物体,它在空中的运动就叫抛体运动。物体被抛出后,在忽略空气阻力的情况下,它的运动轨迹总是被限制在通过抛射点的由抛出速度方向和竖直方向所确定的平面内,因而,抛体运动是二维运动。物体在各时刻的加速度都是重力加速度  $g$ ,它的速度和位置随时间的变化可以用式 (1.2.20) 和 (1.2.21) 的前两式

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned} \right\}$$

表示,如果从抛出时刻开始计时,即  $t=0$ ,选抛出点为坐标原点,即  $x_0=0, y_0=0$ 。如图 1.2.8 所示。以  $v_0$  表示物体的初速度,以  $\theta$  表示抛射角(即初速度与  $x$  轴的夹角),则  $v_0$  沿  $x$  轴和  $y$  轴的分量分别是

$$v_{0x}=v_0 \cos\theta, \quad v_{0y}=v_0 \sin\theta$$

物体在空中的加速度为

$$a_x=0, \quad a_y=-g$$

可得物体在空中任意时刻的速度为

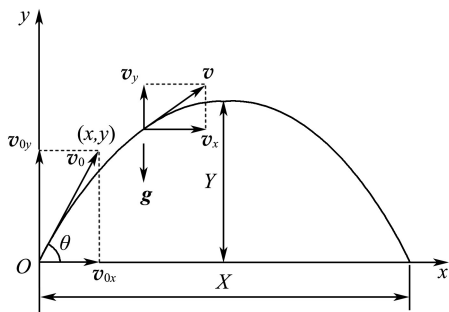


图 1.2.8 抛体运动分析



$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= v_0 \sin\theta - gt \end{aligned} \right\} \quad (1.2.22)$$

物体在空中任意时刻的位置为

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta \cdot t \\ y &= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.23)$$

式(1.2.22)和(1.2.23)表明抛体运动是水平方向的匀速运动和竖直方向的匀加速运动的合成,由这两个式子可以经过简单推导得出下列四个结论:

① 物体从抛出到回落到抛出点高度所用的时间

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

② 飞行中的最大高度(即高出抛出点的距离)

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

③ 飞行的射程(即回落到与抛射点的高度相同时所经过的水平距离)

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

此式表明,当初速度大小相同时,在抛射角 $\theta=45^\circ$ 的情况下射程最大。

④ 在式(1.2.23)中消去 $t$ ,可得抛体的轨道函数为

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

对于一定的 $v_0$ 和 $\theta$ ,这个函数表示一条通过原点的二次曲线,在数学上叫“抛物线”。

应该指出,以上关于抛体运动的公式,都是在忽略空气阻力的情况下得出的。在实际应用中,只有在初速率较小的情况下才比较符合。实际中子弹或炮弹在空中的飞行规律和上述公式是有很大区别的。例如,以550m/s的初速率沿抛射角 $\theta=45^\circ$ 射出的子弹,按上述公式计算的射程在30 000m以上,而实际上由于空气阻力的作用,射程不过8 500m。

**例 1.2.12** 一学生在体育馆阳台上以抛射角 $\theta=30^\circ$ 和速率 $v_0=20\text{m/s}$ 向台前操场投出一垒球。球离开手时距离操场水平面的高度 $h=10\text{m}$ 。试问球抛出后何时着地?在何处着地?着地时的速度的大小和方向各是如何?

**解** 以抛出点为原点,建立如图1.2.9所示坐标系,根据式(1.2.23)中的

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

以 $(x, y)$ 表示着地点坐标,则 $y=-h=-10\text{m}$ ,把 $v_0=20\text{m/s}$ 和 $\theta=30^\circ$ 代入得

$$-10 = 20 \times \frac{1}{2} \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

解此方程得 $t=2.78\text{s}$ 和 $-0.74\text{s}$ ,取正数解,即垒球在出手后2.78s着地。

着地点的水平位置 $x=v_0 \cos\theta \cdot t=20 \times \cos 30^\circ \times 2.78=48.1(\text{m})$ ,所以着地点坐标 $(x, y)=(48.1, -10)$ 。

根据式(1.2.22)得着地点的速度

$$v_x = v_0 \cos\theta = 20 \times \cos 30^\circ = 17.3(\text{m/s})$$

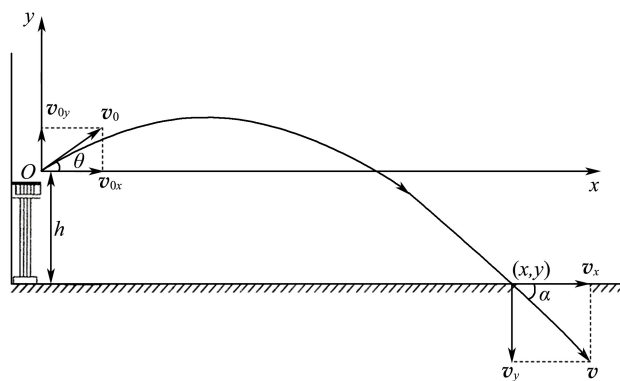


图 1.2.9 例 1.2.12 用图

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 20 \times \sin 30^\circ - 9.8 \times 2.78 = -17.2 \text{ (m/s)}$$

着地时速度的大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17.3^2 + (-17.2)^2} = 24.4 \text{ (m/s)}$$

着地时的速度和  $x$  轴的夹角

$$\alpha = \arctan \frac{|v_y|}{v_x} = \arctan \frac{17.2}{17.3} = 44.8^\circ$$

## 1.3 圆周运动

### 【学习目标】

理解圆周运动的角量表示,会应用线速度和角速度之间的关系进行计算;

掌握圆周运动的切向加速度和法向加速度,能够结合角量与线量的关系求出角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度和总加速度;

掌握用角量表示的匀变速圆周运动,能够熟练计算匀变速圆周运动中的初角速度、末角速度、角加速度、角位移和时间。

### 【知识引入】

**引例:**一列火车由静止开始速率均匀增大,其轨道为半径  $R = 1440\text{m}$  圆弧。已知起动后  $t = 3\text{min}$  时列车的速率为  $v = 18\text{m/s}$ ,求起动后  $t_1 = 2\text{min}$  时,列车的切向加速度、法向加速度和总加速度。

### 【知识正文】

质点做圆周运动时,它的速率  $v$  通常叫做线速度。如果以  $s$  表示圆周上某点  $A$  量起的弧长,则线速度

$$v = \frac{ds}{dt}$$

以  $\theta$  表示半径  $R$  从  $OA$  位置开始转过的角度,则  $s = R\theta$ 。则