第五章　空间解析几何

本章概述

一、基本内容

(一) 空间直角坐标系

1.空间直角坐标系

(1) 三个坐标轴:x 轴(横轴),y 轴(纵轴),z 轴(竖轴).

(2) 三个坐标平面:xOy 坐标面,yOz 坐标面,zOx 坐标面.

(3) 八个卦限:三个坐标面将整个空间分为八个部分,每个部分称为一个卦限.

2.空间中特殊点的坐标

(1) 坐标轴上点的坐标

x 轴上的点的坐标为$(x,0,0)$;

y 轴上的点的坐标为$(0,y,0)$;

z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$.

(2) 坐标面上点的坐标

xOy 坐标面上的点的坐标为$(x,y,0)$;

yOz 坐标面上的点的坐标为$(0,y,z)$;

zOx 坐标面上的点的坐标为$(x,0,z)$.

3.对称点的坐标

设$M(x,y,z)$为空间中一点.

(1) 点 M 关于坐标原点的对称点的坐标:$(-x,-y,-z)$.

(2) 点 M 关于坐标轴的对称点的坐标:

关于 x 轴对称:$(x,-y,-z)$;

关于 y 轴对称:$(-x,y,-z)$;

关于 z 轴对称:$(-x,-y,z)$.

(3) 点 M 关于坐标面的对称点的坐标:

关于 xOy 坐标面对称:$(x,y,-z)$;

关于 yOz 坐标面对称:$(-x,y,z)$;

关于 zOx 坐标面对称:$(x,-y,z)$.

4.空间两点间的距离

(1) 空间两点间的距离公式

设空间两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则 M_1 与 M_2 的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(2) 空间点到坐标轴的距离

设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点.

M 到 x 轴的距离:$d=\sqrt{y^2+z^2}$;

M 到 y 轴的距离:$d=\sqrt{x^2+z^2}$;

M 到 z 轴的距离:$d=\sqrt{x^2+y^2}$.

(3) 空间点到坐标面的距离

设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点.

M 到 xOy 坐标面的距离:$|z|$;

M 到 yOz 坐标面的距离:$|x|$;

M 到 zOx 坐标面的距离:$|y|$.

(二) 向量及其运算

1.向量的基本概念

(1) 向量:既有大小又有方向的量. 常表示为$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$.

(2) 向量的模:向量的大小. 常表示为$|\overrightarrow{AB}|$,$|\boldsymbol{a}|$,$|\vec{a}|$.

(3) 向量的坐标表示:$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z)$.

(4) 向量的夹角:向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的正向夹角. 记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,$0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$.

(5) 向量的方向角:向量与三个坐标轴的夹角.

向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的方向余弦:$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}$,$\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|}$,$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}$.

(6) 向量的投影:令 φ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 和 x 轴的夹角,则$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\varphi$.

2.向量的运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,$\lambda$ 为数.

(1) 向量的加、减法:$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$.

(2) 向量的数乘:$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

(3) 向量的数量积:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$(其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角),$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(4) 数量积的性质:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(5) 向量的向量积

向量的向量积按下列方式定出:

模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

(6) 向量积的性质：

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．

(三) 曲面与曲线

1.常见的曲面及其方程

(1) 球面

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$
$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0.$$

(2) 旋转曲面

yOz 坐标面上曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所产生的曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

yOz 坐标面上曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转所产生的曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

类似地，可以写出其他旋转曲面的方程.

(3) 柱面

$F(x,y)=0$；　(母线平行于 z 轴)

$G(y,z)=0$；　(母线平行于 x 轴)

$H(z,x)=0$.　(母线平行于 y 轴)

2.空间曲线

(1) 一般方程：曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

(2) 参数方程：$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$

(四) 平面与直线

1.平面的方程

设平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

(1) 平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

(2) 平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$.

(3) 平面的截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.（$a$、$b$、$c$ 分别为平面在 x、y、z 三轴上的截距）

2.两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则平面 Π_1 和 Π_2

的夹角 θ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

3.点到平面的距离

平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 到平面的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4.空间直线的方程

设直线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$.

(1) 一般方程：平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们的交线方程为：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

(2) 对称式方程(点向式方程)：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

(3) 参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$.

5.两直线的夹角

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，夹角为 φ，则

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

6.直线与平面的夹角

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为 φ，则

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

二、基本解题方法

1. 记忆向量及其运算的相关公式，计算向量的模和方向角.
2. 利用数量积求两向量的夹角余弦.
3. 利用向量积求平面的法向量、直线的方向向量和平面内三角形的面积.
4. 记忆球面、旋转曲面和柱面的方程形式，求出各曲面方程.
5. 利用平面的点法式方程、一般方程和截距式方程写出平面方程.
6. 将直线的一般方程、对称式方程和参数方程互相转化.

§1* 向量及其线性运算(1)

学习目标

1. 能够建立空间直角坐标系.
2. 理解空间点的坐标.
3. 记忆空间两点间的距离公式.
4. 理解向量的概念及其表示方法.

预习导学

1. 空间直角坐标系中,有三个坐标轴:________,________,________;三个坐标平面:________,________,________;三个坐标面将整个空间分为________个部分,每一部分称为一个________.

2. 在图 5-1 中用罗马数字标出八个卦限的位置.

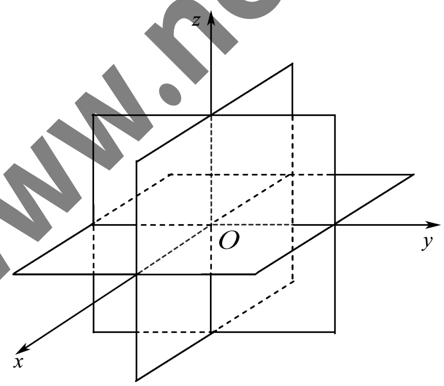


图 5-1

3. xOy 坐标面上的点的坐标为________;yOz 坐标面上的点的坐标为________;zOx 坐标面上的点的坐标为________;x 轴上的点的坐标为________;y 轴上的点的坐标为________;z 轴上的点的坐标为________.

4. 设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点. 则点 M 关于坐标原点的对称点的坐标为________;关于 x 轴的对称点的坐标为________;关于 y 轴的对称点的坐标为________;关于 z 轴的对称点的坐标为________;关于 xOy 坐标面的对称点的坐标为________;关于 yOz 坐标面的对称点的坐标为________;关于 zOx 坐标面的对称点的坐标为________.

5. 空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式为________________.

6. 设 $M(x,y,z)$ 为空间中一点,则点 M 到 x 轴的距离为__________;到 y 轴的距离为

______；到 z 轴的距离为______；到 xOy 坐标面的距离为______；到 yOz 坐标面的距离为______；到 zOx 坐标面的距离为______.

7. 既有______又有______的量称为向量，通常表示为 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}$.

8. 与起点无关的向量称为______.

9. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小______，且方向______，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为______.

10. 向量的______叫作向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模表示为______. 模等于 1 的向量叫作______，模等于 0 的向量叫作______，方向可以看作是______.

11. 如果两个非零向量的方向______或______，则称这两个向量平行，两向量平行又称两向量______.

课堂笔记

课堂练习

1. 判断下列各点在空间直角坐标系中的位置.

$A(0,0,3)$；$B(4,-2,0)$；$C(0,6,0)$；$D(-2,0,0)$；$E(0,-7,1)$；$F(-1,0,-2)$；$G(1,2,3)$；$H(3,4,-1)$.

2. 求点 $A(2,-1,3)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面的对称点的坐标.

3. 已知 $A(1,0,2)$，$B(0,3,1)$，求 A 与 B 两点之间的距离.

4. 分别求点 $(-2,4,-7)$ 到原点，x 轴，y 轴，z 轴，xOy 坐标面，yOz 坐标面，zOx 坐标面的距离.

5. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

6. 如图 5-2 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心.

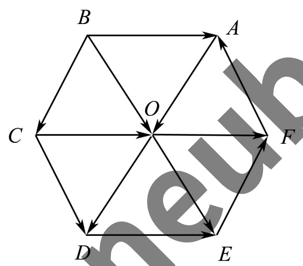


图 5-2

(1) 写出图中与向量 $\overrightarrow{AO}$ 相等的向量.

(2) 与向量 $\overrightarrow{AO}$ 长度相等的向量有多少个？

(3) 是否存在与向量 $\overrightarrow{AO}$ 长度相等，方向相反的向量？

(4) 与向量 $\overrightarrow{AO}$ 长度相等的共线向量有哪些？

7. 判断对错：

(1) 温度有零上温度和零下温度，因此温度是向量.　(　　)

(2) 线段 PQ 与线段 QP 是一样的，有向线段 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PQ}$ 也是一样的.　(　　)

(3) 若两个向量相等，则它们的起点相同，终点相同.　(　　)

(4) 凡是模相等且平行的两个向量都是相等的.　(　　)

(5) 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　(　　)

(6) 若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.　(　　)

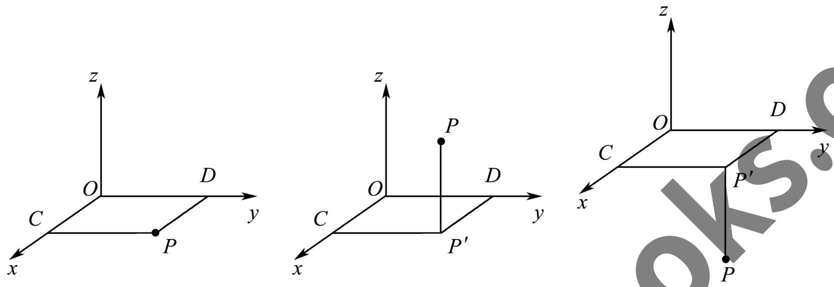
(7) 与任一向量都平行的向量是零向量.　(　　)

(8) 如果两个向量的模相等且方向相反，则这两个向量平行.　(　　)

课后作业

A 组

1. 根据所给的图形和条件写出点 P 的坐标：



(1)　　(2)　　(3)

(1)$CP=3, DP=2$；　　(2)$CP'=3, DP'=2, PP'=4$；

(3)$CP'=3, DP'=2, PP'=4$.

2. 判断下列各点在空间直角坐标系中的位置：
$A(-2,0,0)$；$B(0,1,0)$；$C(0,0,-5)$；$D(0,1,-2)$；$E(3,0,1)$；$F(2,-1,0)$.

3. 写出下列各点的对称点的坐标：
(1) 点$(1,2,3)$，关于 x 轴；　　(2) 点$(-1,3,2)$，关于 y 轴；

(3) 点$(2,-1,1)$，关于 z 轴；　　(4) 点$(1,1,1)$，关于 xOy 坐标面；

(5) 点$(-1,2,1)$，关于 yOz 坐标面；　　(6) 点$(1,-1,4)$，关于 zOx 坐标面.

4. 求 AB 两点之间的距离：
(1)$A(2,1,3)$，$B(6,3,-1)$；　　(2)$A(2,3,5)$，$B(3,1,4)$.

5. 求点 $A(4,-3,5)$ 到各坐标轴、各坐标面的距离.

6. 求证以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

7. 在 z 轴上,求与点 $A(1,0,2)$,$B(1,-3,1)$ 等距离的点.

8. 以下哪些量是数量,哪些量是向量?
距离、位移、身高、力、质量、时间、速度、加速度、面积、电场强度、温度.

9. 判断对错:

(1) 坐标平面上的 x 轴和 y 轴都是向量.　(　　)

(2) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.　(　　)

(3) 若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.　(　　)

(4) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　(　　)

(5) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.　(　　)

(6) 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,则 A,B,C,D 四点构成平行四边形.　(　　)

(7) 同一条直线上的两个向量一定是平行向量.　(　　)

(8) 平行向量的方向一定相同.　(　　)

(9) 不相等的向量一定不平行.　(　　)

(10) 互为相反的向量一定是平行向量.　(　　)

B 组

1. 如图 5-3 所示,在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中,$|OA|=3$,$|OC|=4$,$|OD'|=2$,写出 D',A',B',C' 四点的坐标.

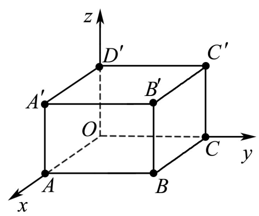


图 5-3

2. 判断下列各点在空间直角坐标系中的位置:$A(1,2,3)$;$B(-1,2,3)$;$C(1,-2,3)$;$D(-1,-2,3)$;$E(-1,2,-3)$;$F(-1,-2,-3)$;$G(1,-2,-3)$;$H(1,2,-3)$.

3. 已知 $A(x,2,3)$ 与 $B(-2,y,z)$，根据下列条件分别求 $x+y+z$ 的值：

(1) A 与 B 关于 x 轴对称；

(2) A 与 B 关于 z 轴对称；

(3) A 与 B 关于 xOy 坐标面对称；

(4) A 与 B 关于原点对称.

4. 已知点 $A(3,a,7)$，$B(2,-1,5)$，且 $|AB|=3$，求 a 的值.

5. 求证以 $A(1,-2,11)$、$B(4,2,3)$、$C(6,-1,4)$ 三点为顶点的三角形是一个直角三角形.

6. 在 yOz 坐标面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点.

7. 设 P 在 x 轴上，它到点 $A(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $B(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

8. 判断对错

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 的必要不充分条件. (　　)

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量，是 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 的充分不必要条件. (　　)

(3) 两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 相等的充要条件是：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. (　　)

(4) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$. (　　)

C 组

1. 结晶体的基本单位称为晶胞，图 5-4 是食盐晶胞的示意图(可看成是八个棱长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方体堆积成的正方体)，其中实心点“●”代表钠离子，空心点“○”代表氯离子，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 后，写出图中标号 1 至 6 的离子的坐标.

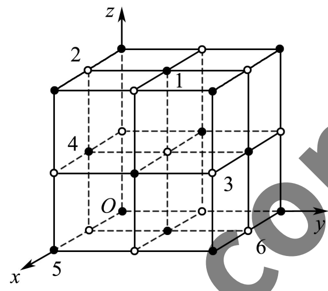


图 5-4

2. 如图 5-5 所示，已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，E，F 分别为棱 AB，CD 的中点.

(1) 建立适当的空间直角坐标系，写出定点 A，B，C，D 的坐标；

(2) 求 EF 的长.

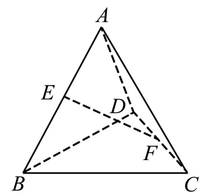


图 5-5

3. 下列情形中，向量的终点构成什么图形?

(1) 把所有单位向量移动到同一个起点；

(2) 把平行于某一直线的所有单位向量平移到同一起点；

(3) 把平行于一直线的一切向量平移到同一起点.

4. 某人从 A 点出发向东走了 5 米到达 B 点，然后改变方向，按东北方向走了 $10\sqrt{2}$ 米到达 C 点，到达 C 点后又改变方向，向西走了 10 米到达 D 点.

(1) 做出向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

(2) 求$\overrightarrow{AD}$ 的模.

§2 向量及其线性运算(2)

学习目标

1. 掌握向量的线性运算方法.
2. 理解向量的坐标表达式.
3. 能够利用向量的坐标进行线性运算.
4. 会求向量的单位向量、方向角、方向余弦和在 u 轴上的投影.

预习导学

1. 求两向量之和的方法有________法则和________法则.

2. 向量的加法符合:交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$____________,结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$____________.

3. 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的________向 $\boldsymbol{b}$ 的________所引向量便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,表示为________.

4. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作________,它的模 $=$________,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$________,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$________.

5. 通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的________,记为 $\boldsymbol{e}_a$,则 $\boldsymbol{e}_a=$________.

6. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量唯一吗?

7. 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使______________.

8. 设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任意向量,将 $\boldsymbol{r}$ 平移,使 $\boldsymbol{r}$ 的起点在坐标原点 O,终点 M 的坐标为(x,y,z),向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式为________________. 有序数 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的________,向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表达式为 $\boldsymbol{r}=$__________________________.

9. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$____________,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$______________,$\lambda\boldsymbol{a}=$____________.

10. 设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,则向量的模 $|\boldsymbol{r}|=$____________.

11. 当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时,两个向量之间的不超过______的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记作____________.

12. 非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别记为 α,β,γ,称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的__________,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的____________,设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,则 $\cos\alpha=$________,$\cos\beta=$________,$\cos\gamma=$________. 与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r=$____________,且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$______.

13. 向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影,记作________,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的__________. 令 φ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 和 u 轴的夹角,则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=$__________.

课堂笔记

课堂练习

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

3. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

4. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}(6,7,-6)$ 的单位向量.

5. 已知两向量 $\boldsymbol{a}(\lambda,2,1)$，$\boldsymbol{b}(0,-1,\mu)$ 平行，求 λ，μ 的值.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,5,4)$，$\boldsymbol{b}(-6,1,2)$，$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 及与其方向一致的单位向量.

7. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$.

(1) 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模；

(2) 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向一致的单位向量；

(3) 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦和方向角；

(4) 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

8. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

课后作业

A 组

1. (画图题) 在图 5-6 中画出所求的向量：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$；　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　　(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

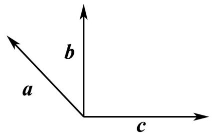


图 5-6

2. 化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=$________________.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(4,5,6)$，求：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$__________，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$__________，$3\boldsymbol{a}=$__________，

$-2\boldsymbol{b}=$__________，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$__________，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$__________.

4. 求从点 $A(2,2,5)$ 指向原点的向量.

5. 已知两点 $A(1,2,5)$ 和 $B(0,1,3)$.

(1) 求$\overrightarrow{AB}$；

(2) 求 $|\overrightarrow{AB}|$；

(3) 求$\overrightarrow{AB}$ 的单位向量；

(4) 求$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴成相等的锐角，求它的方向余弦.

7. 确定 α,β,γ 的值，使向量 $\alpha\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+(\beta-1)\boldsymbol{k}$ 与向量 $(\beta-3)\boldsymbol{i}+(\beta+\gamma)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 相等，并求此时向量的模与方向余弦.

8. 一向量的起点为 $A(1,4,-2)$，终点为 $B(-1,5,0)$，求它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

9. 一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7，求这个向量的起点 A 的坐标.

B 组

1. 已知梯形 $OABC$，$\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OA}$ 且 $|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$.

2. 把 $\triangle ABC$ 的边 BC 五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接(图 5-7). 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

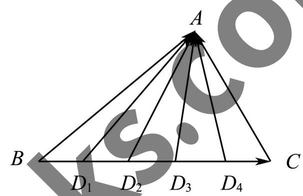


图 5-7

3. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线的长度.

4. 设向量的方向余弦分别满足：(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

5. 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标.

6. 一向量与 x 轴，y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求该向量的方向角.

7. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

8. 设立方体的一条体对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|\overrightarrow{OA}|=\boldsymbol{a}$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

9. 在光滑的水平地板上用同地板成 $45°$ 角的 20 磅力 F 拖一辆小车(图 5-8). 使小车向前移动的有效力有多大?

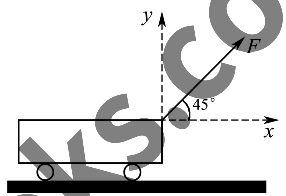


图 5-8

C 组

1. 一架喷气式客机向正东以 500 英里 / 小时的速度飞行，在飞行途中遇到一股从机尾吹来的东北方向 $60°$ 的风，风速为 70 英里 / 小时，飞机罗盘方位保持正东方向，但是由于风力而获得新的地面速度和航向，这个航速和航向是什么?

2. 一只鸟从它的巢朝东北方向 $30°$ 飞 6 km，停留一棵树上休息. 然后朝着东南方向飞 $3\sqrt{2}$ km，降落在一根电话线杆顶端. 把坐标系的原点设在鸟巢处，x 轴指向东，y 轴指向北(图 5-9).

(1) 树在什么点? (2) 电话线杆在什么点?

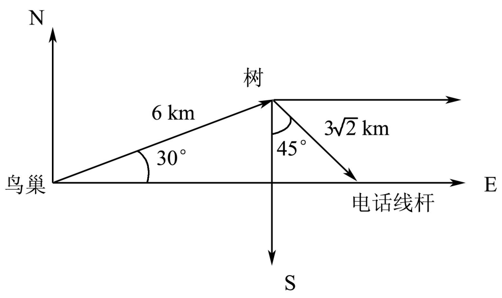


图 5-9

3．马克用 60 N 的力沿南偏东方向推一根柱子．丹用 80 N 的力沿南偏西方向推同一根柱子(图 5-10)．求两人的合力的大小及方向．

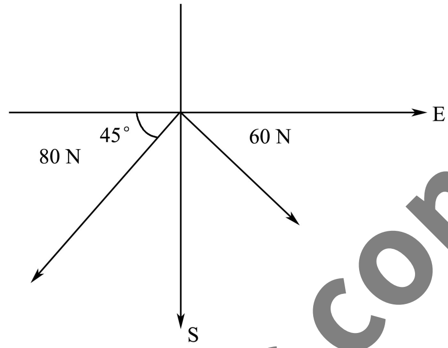


图 5-10

4．已知风速为 40 m/h，风向为北偏西 30°．一架飞机在无风时飞行速度为 80 m/h，这架飞机需要朝北飞行(图 5-11)，请问这架飞机该朝什么方向才能使其径直朝北飞行，此时飞机相对于地面的速度为多少？

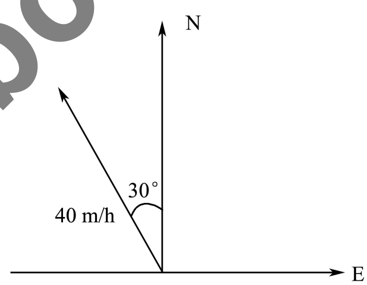


图 5-11

5．已知三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不平行，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行．试证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$．

6．从平面内正 n 边形的中心引出到各个顶点的向量，证明这些向量的和为零向量．

§3　数量积　向量积

学习目标

1. 理解两个向量的数量积和向量积的概念.
2. 记忆两个向量的数量积和向量积的性质和运算律.
3. 会计算两个向量的数量积和向量积.

预习导学

1. 设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则向量的模 $|\boldsymbol{r}|=$______.

2. 当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过______的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作______.

3. 设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的______的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或称为内积、点积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

4. 两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这个向量的方向上的投影的乘积. 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot$______$=|\boldsymbol{b}|\cdot$______.

5. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$______.

6. 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$ ______.

7. 数量积满足下列运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$______；

(3)λ、μ 为数，则 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$______$=$______，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=$______.

8. 数量积的坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______；设 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有 $\cos\theta=$______.

9. 设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出：

(1)$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=$______，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

(2)$\boldsymbol{c}$ 的方向______于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按______规则从______转向______来确定. 那么，向量 $\boldsymbol{c}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(或称为外积、叉积)，记作______，即 $|\boldsymbol{c}|=$______.

10. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=$______.

11. 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow$ ______.

12. 向量积满足下列运算律：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$______；(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=$______；

(3)λ 为数，则 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=$______$=$______.

13. 向量积的坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$______________.

14. 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为______________.

课堂笔记

课堂练习

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为30°，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$____________.

2. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=12$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

3. 根据下列所给条件，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$.

(1)$\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$；　　(2)$\boldsymbol{a}=-8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

5. 证明向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，$\boldsymbol{c}=(-1,-1,2)$ 互相垂直.

6. 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

7. 已知三点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

课后作业

A 组

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，在下列条件下，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$.

2. 已知向量 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$，求 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$.

3. 根据下列所给条件，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}2+\boldsymbol{k}$.

4. 判断下列向量是否是垂直的：

(1)$\boldsymbol{a}=(3,-2,0)$ 和 $\boldsymbol{b}=(4,6,1)$；　　(2)$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$；

(3) 向量 $\boldsymbol{o}$ 和任一向量 $\boldsymbol{u}$.

5. 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是 xOy 坐标面上的向量,如图 5-12 所示,判断 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的方向.

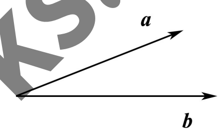


图 5-12

6. 分别计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$：

(1)$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,2,-4)$；　　(2)$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

7. 求以点 $A(3,2,1)$,$B(2,4,6)$,$C(-1,2,5)$ 为顶点的三角形的面积.

B 组

1. 已知三角形 ABC 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,

(1) 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,三角形 ABC 的形状为__________.

(2) 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时,三角形 ABC 的形状为__________.

2. 如图 5-13 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,已知 $|\overrightarrow{AB}|=4$,$|\overrightarrow{AD}|=3$,$\angle DAB=60°$. 求：

(1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$；　　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$.

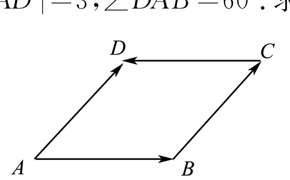


图 5-13

3. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

4. 已知$\boldsymbol{a}=(-1,-2,1)$与$\boldsymbol{b}=(1,2,t)$垂直，求t的值.

5. 设$\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问λ与μ有怎样的关系，能使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$与$z$轴垂直？

6. 已知向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　　(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=36$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

8. 设向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，问$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$是否平行？

9. 求一个垂直于由点$P(1,-1,0)$，$Q(2,1,-1)$，$R(-1,1,2)$决定的平面的向量.

10. 以下式子哪些有意义，哪些没有意义？

(1)$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$；　　(2)$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$；

(3)$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}$；　　(4)$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$；

(5)$|\boldsymbol{u}|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$；　　(6)$|\boldsymbol{u}|\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$；

(7)$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$；　　(8)$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$；

(9)$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}$；　　(10)$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}$.

C 组

1. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的夹角的余弦值.

3. 设向量 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直. 问：

(1) k 为何值时，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 垂直；

(2) k 为何值时，以 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

4. 用向量证明不等式：$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$，其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

5. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所做的功(坐标系长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

6. 如图5-14所示，在杠杆上支点O的一侧与点O的距离为x_1的点P_1处，有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角θ_1的力F_1作用着；在O的另一侧与点O的距离为x_2的点P_2处，有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角θ_2的力F_2作用着．问θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|F_1|$、$|F_2|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？

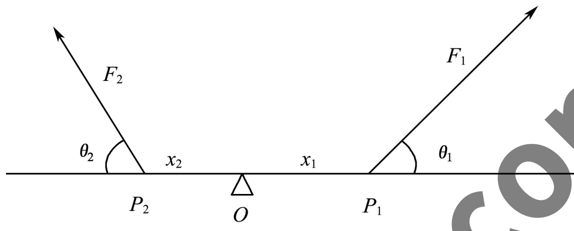


图 5-14

7. 已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$满足条件$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，求证$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$共线．